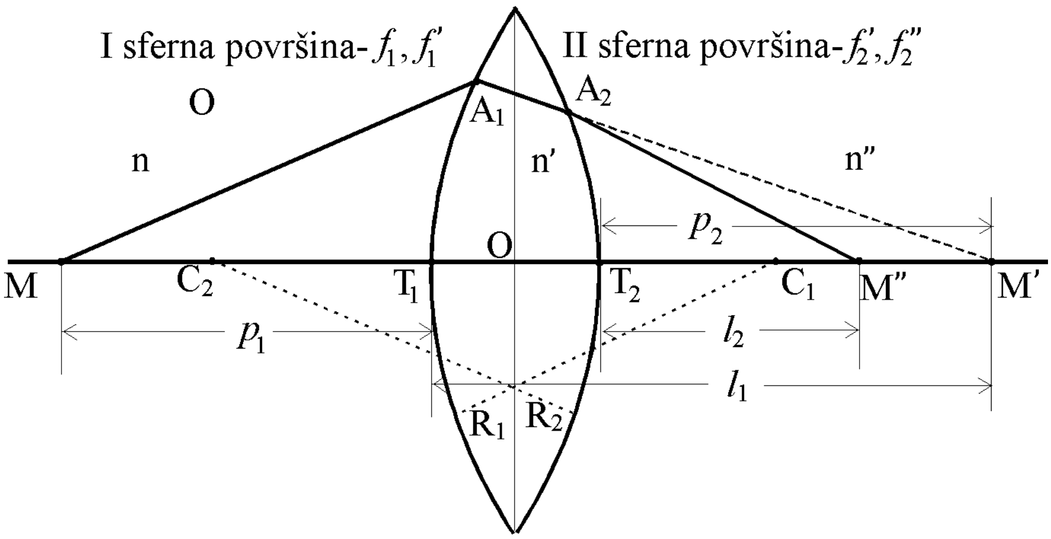
Izvođenje optičarske jednačine za tanko sočivo

Posmatrajmo optički sistem koji se sastoji od dve sferne površine, poluprečnika R_1 i R_2 koje formiraju sočivo. Te dve sferne površine razdvajaju tri optički različite sredine, indeksa prelamanja n, n' i n'' (slika 1). Žižne daljine prve sferne površine ćemo označiti sa f_1 i f_1', a druge sa f_2' i f_2''. Njihove vrednosti su određene preko optičkih moći prve i druge sredine, ω_1 i ω_2, a na osnovu relacije:

$$\frac{n}{f_1}=\frac{n'}{f_1'}=\omega_1=\frac{n'-n}{R_1} \quad \text{i} \quad \frac{n'}{f_2'}=\frac{n''}{f_2''}=\omega_2=\frac{n''-n'}{R_2} \tag{1}$$

Da bi izveli jednačinu tankog sočiva, nađimo lik svetle tačke M, koja se nalazi na rastojanju p_1 od temena prve sferne površine T_1. Posmatrajmo zrak MA_1, koji bi posle prelamanja na I sfernoj površini dao lik M' posmatrane tačke, na rastojanju l_1 od temena T_1, kada ne bi bilo druge sferne površine i sredine indeksa prelamanja n''.



Slika 1. Geometrija za izvođenje jednačine tankog sočiva.

Rastojanje lika l_1 je povezano sa rastojanjem predmeta p_1 preko optičke jednačine za prvu sfernu površinu:

$$\frac{n}{p_1}+\frac{n'}{l_1}=\frac{n'-n}{R_1} \tag{2}$$

Međutim, zrak A_1M' nailazi na drugu sfernu površinu u tački A_2, prelama se i daje konačan lik M'' posmatrane svetle tačke. Taj lik se nalazi na rastojanju l_2 od temena T_2 druge sferne površine. **Glavna ideja ovog izvođenja se ogleda u posmatranju realnog zraka A_1A_2, koji se prostire u sredini indeksa prelamanja n'.** Taj zrak povezuje virtuelni lik M' i realni lik M'', to jest ta dva lika su konjugovana, a M' se posmatra kao virtuelni predmet koji daje realan lik M''. Dakle, sada je M' predmet za drugu sfernu površinu, na rastojanju p_2 od njenog temena T_2. Za nju važi jednačina:

$$\frac{n'}{p_2}+\frac{n''}{l_2}=\frac{n''-n'}{R_2} \tag{3}$$

Rastojanje p_2 u prethodnoj jednačini se uzima sa negativnim znakom, jer se radi o rastojanju virtuelnog, imaginarnog predmeta. Sa druge strane, realan zrak A_1A_2 se prostire u sredini sa indeksom prelamanja n', što je istaknuto u jednačini (3), tako što je virtuelni predmet postavljen u toj sredini (član **n'/p₂**).

Sa slike 1 je očigledno da je:

$$l_1=|p_2|+T_1T_2,$$

što nas dovodi i do **glavne aproksimacije tankog sočiva: rastojanje T_1T_2, to jest debljina sočiva, je zanemarljiva u odnosu na rastojanja p_1, l_1, p_2, l_2 i poluprečnike sfernih površina R_1 i R_2.** Na osnovu te aproksimacije možemo uzeti da je rastojanje p_2 virtuelnog predmeta od druge sferne površine približno jednako rastojanju lika l_1 od prve sferne površine, ali sa negativnim znakom, to jest:

$$p_2=-l_1 \ \text{ i } \ \frac{n'}{p_2}=-\frac{n'}{l_1} \tag{4}$$

Sabiranjem jednačina (2) i (3) dobijamo:

$$\frac{n}{p_1}+\frac{n'}{l_1}+\frac{n'}{p_2}+\frac{n''}{l_2}=\frac{n'-n}{R_1}+\frac{n''-n'}{R_2},$$

odakle posle uzimanja jednačine (4) u obzir, dobijamo jednačinu:

$$\frac{n}{p_1}+\frac{n''}{l_2}=\frac{n'-n}{R_1}+\frac{n''-n'}{R_2},$$

u kojoj ćemo sada umesto p_1, rastojanje predmeta od tankog sočiva obeležiti sa p, a rastojanje lika od tankog sočiva sa l, što daje:

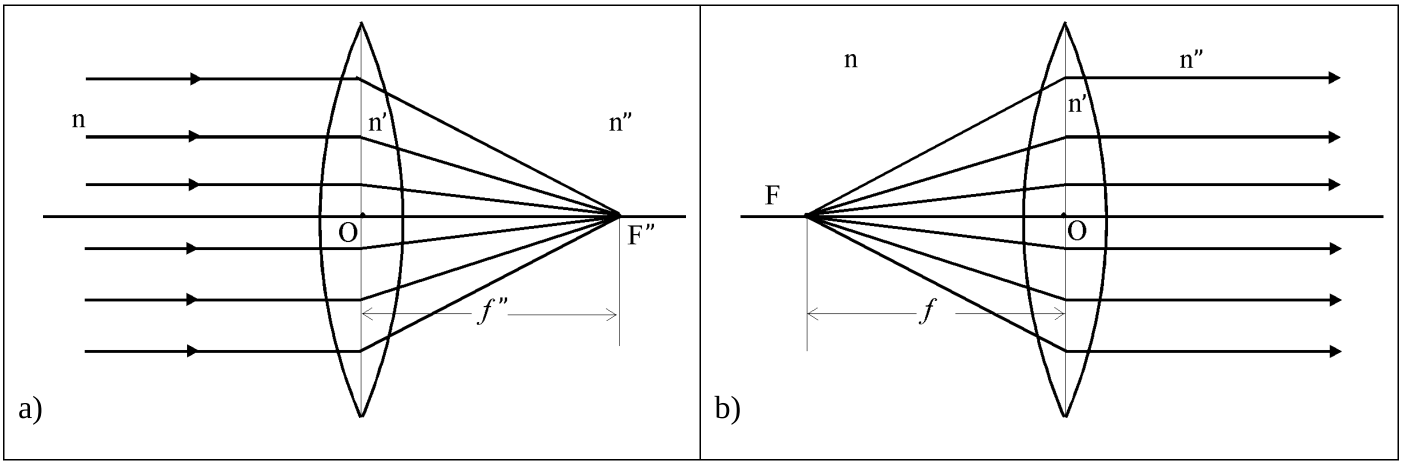
$$\frac{n}{p}+\frac{n''}{l}=\frac{n'-n}{R_1}+\frac{n''-n'}{R_2} \tag{5}$$

Jednačina (5) predstavlja najopštiji oblik **optičarske jednačine** za tanko sočivo, napravljenog od materijala indeksa prelamanja n', koje razdvaja dve sredine indeksa prelamanja n i n''.

Izraz sa desne strane jednačine (5) zavisi samo od poluprečnika sfernih površina R_1 i R_2 i optičkih osobina sredina, datih sa n, n' i n''. Po analogiji sa pojedinačnim sfernim površinama, ta veličina se naziva **optička moć** tankog sočiva, i data je jednačinom:

$$\omega=\frac{n'-n}{R_1}+\frac{n''-n'}{R_2}=\omega_1+\omega_2, \tag{6}$$

gde su ω_1 i ω_2 optičke moći prve i druge sferne površine. Dakle, optička moć tankog sočiva jednaka je zbiru optičkih moći sfernih površina.



Slika 2. a) Prva F i b) druga F'' žiža tankog sočiva, sa odgovarajućim žižnim daljinama.

Na osnovu optičarske jednačine (5) možemo da definišemo prvu i drugu žižu sočiva, F i F'' kao i odgovarajuće žižne daljine, f i f'' (slika 2). Treba istaći da se žižne daljine mere od sfernih površina. Ako predpostavimo da je predmet u beskonačnosti ($p \to \infty$), onda će zraci upadati na sočivo paralelno sa optičkom osom sočiva i posle prelamanja će se seći u drugoj žiži sočiva F'', koja se nalazi na rastojanju $l = f''$, tako da važi:

$$\frac{n''}{f''} = \frac{n' - n}{R_1} + \frac{n'' - n'}{R_2} = \omega \qquad (7)$$

Slično, prvu žižu definišemo kao tačku na optičoj osi sočiva u kojoj postavljeni predmet daje lik u beskonačnosti, to jest za $p = f$, $l \to \infty$. Zraci posle prelamanja kroz sočivo, idu paralelno sa optičkom osom, a f računamo na osnovu:

$$\frac{n}{f} = \frac{n' - n}{R_1} + \frac{n'' - n'}{R_2} = \omega \qquad (8)$$

Na osnovu relacija (7) i (8), očigledna je veza između žižnih daljina i indeksa prelamanja sredina:

$$\frac{n}{f} = \frac{n''}{f''} = \omega \text{ ili } \frac{f''}{f} = \frac{n''}{n} = \omega . \qquad (9)$$

Optičarsku jednačinu sada možemo napisati u obliku podesnom za primenu:

$$\frac{n}{p} + \frac{n''}{l} = \frac{n}{f} = \frac{n''}{f''} . \qquad (10)$$

U slučaju kada je sredina sa obe strane sočiva ista, to jest sa istim indeksom prelamanja n = n'', opričarska jednačina (5), dobija oblik:

$$\frac{n}{p}+\frac{n}{l}=(n'-n)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

što posle deljenja sa n, daje:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{l}=(\frac{n'}{n}-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{11}$$

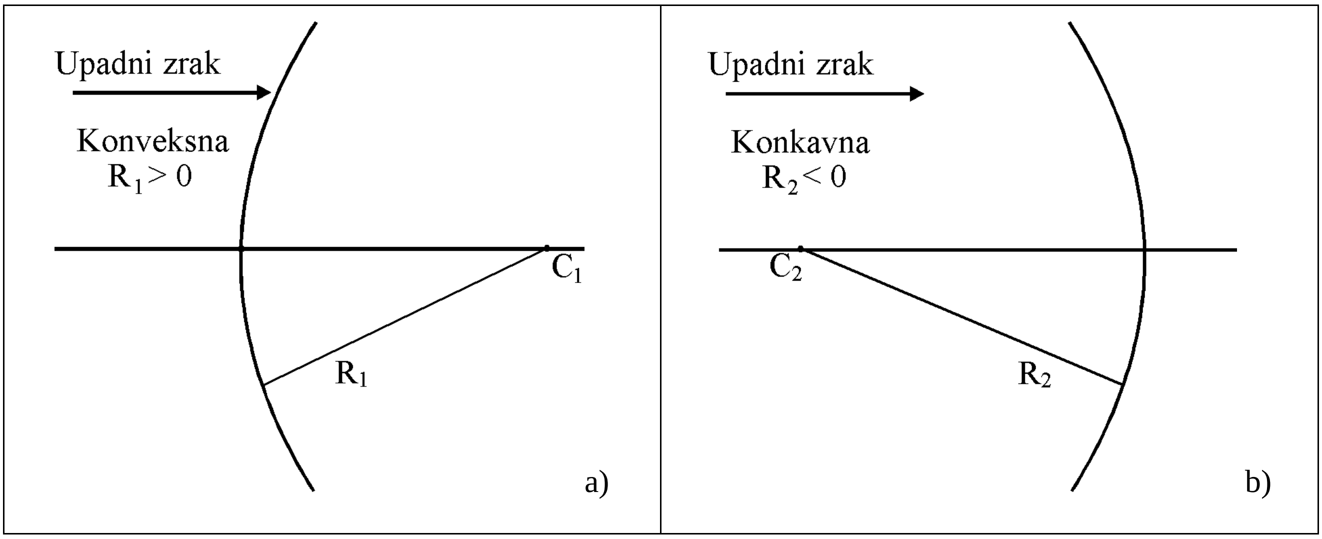
Ako se sočivo nalazi u vazduhu, n=1, dobijamo jednačinu:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{l}=(n'-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{12}$$

Kombinovanjem sa izrazom koji povezuje optičku moć sočiva i žižne daljine (9), uz uslov da je sočivo u vazduhu, dobijamo poznatu relaciju:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{l}=\frac{1}{f}=\frac{1}{f''}=\omega \tag{13}$$

Na osnovu nje sledi da sočivo okruženo vazduhom ima istu žižnu daljinu sa obe strane i koja je jednaka recipročnoj vrednosti optičke moći sočiva.

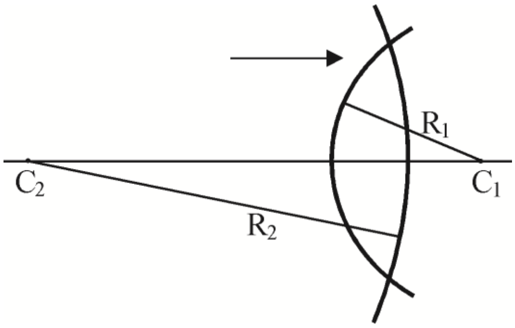


Slika 3. Definicija: a) konveksne, i b) konkavne sferne površine, u odnosu na upadni zrak.

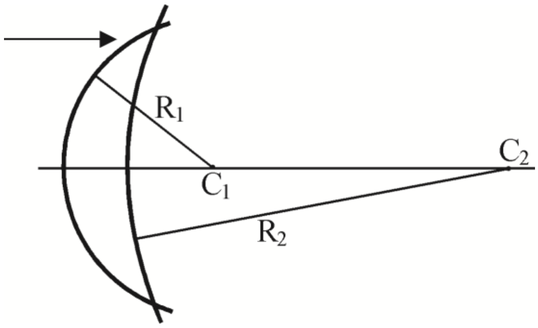
Činjenica na koju treba obratiti pažnju kod primene optičarske jednačine (u obliku datom jednačinama 5,..,12) je sa kakvim predznakom se uzmaju poluprečnici krivina sfernih površina u tom izrazu. Na osnovu slike 3. sledi da će popluprčnik konveksne sferne površine biti uzet kao pozitivan, a poluprečnik konkavne kao negativan, uz napomenu da se oblik površine posmatra u odnosu na upadni zrak.

Primer 1.

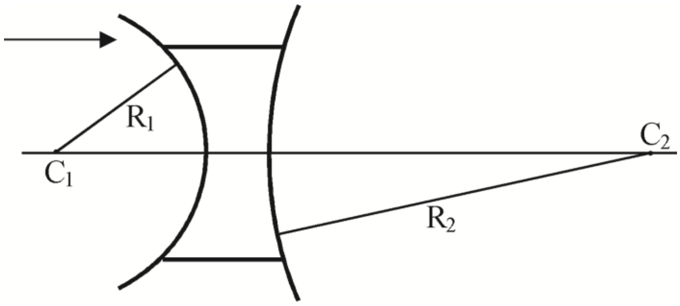
Odrediti optičke moći i žižne daljine svih tankih sočiva koja se mogu formirati kombinovanjem dveju sfernih površina, poluprečnika krivina R_1 = 2cm i R_2 = 5cm (uzeti u obzir i negativne vrednosti). Sferne površine u vazduhu ograničavaju staklenu sredinu indeksa prelamanja n'=1,5. Nacrtati sva sočiva i napisati njihove nazive. Strelicom je označen smer upadnog zraka.



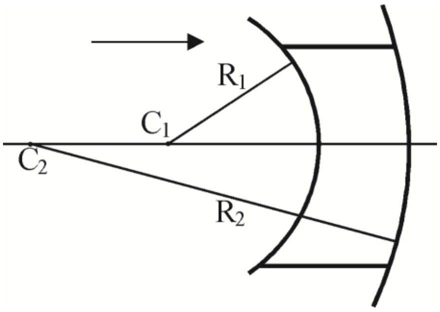
Slika 4a. Sabirno, bikonveksno sočivo.



Slika 4b. Sabirno, konveksno-konkavno sočivo.



Slika 4c. Rasipno, bikonkavno sočivo.



Slika 4d. Rasipno, konkavno-konveksno sočivo.

Primer 2.

Tanko sočivo je formirano od dve sferne površine poluprečnika krivina R_1 = +10,0 cm i R_2 = -25,0 cm. Indeks prelamanja stakla od koga je napravljeno sočivo je $n' = 1{,}74$. Zraci upadaju na sočivo iz vazduha, a posle prelamanja se kreću kroz vodu ($n = 1{,}0\,; n'' = 1{,}33$). Odrediti žižne daljine sočiva u obe sredine.